综合测评参考答案

单元测试卷(一)

1.C **解析**:命题“$\exists x>0,x^{2\,025}-2\,025>0$”的否定是“$\forall x>0,x^{2\,025}-2\,025\leqslant 0$”.故选 C.

2.D **解析**:由题可得 $B=\{-1,0,1\}$,所以 $A\cap B=\{0,1\}$.故选 D.

3.A **解析**:由题意可得 $\complement_U N=\{2,4,8\}$,则 $M\cup\complement_U N=\{0,2,4,6,8\}$.

4.D **解析**:由题意可知 $x-y=-2x$,$x+y=4x$,所以 $M=\{(-2x,4x)\}$,

显然选项中 D 符合题意,此时 $x=1$,A,B,C 不符合题意.故选 D.

5.C **解析**:$a=b\Rightarrow ac=bc$,当 $c=0$ 时,$ac=bc$,a 与 b 不一定相等,A 是假命题;

当 $a=1,b=-2$ 时,$a>b$,但 $a^2<b^2$,充分性不成立,B 是假命题;

$a<5$ 不一定 $a<3$,但 $a<3$ 必有 $a<5$,所以“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件,C 是真命题;

若 $a+5$ 是无理数,则 a 是无理数,若 a 是无理数,则 $a+5$ 是无理数,所以“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件,D 是假命题.故选 C.

6.C **解析**:由集合 A 的子集只有两个,知集合 A 中只有一个元素.

当 $a=0$ 时,$A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}=\{x\mid -3x+2=0\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$,符合题意;

当 $a\neq 0$ 时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 只有一个解,则 $\Delta=9-8a=0$,解得 $a=\frac{9}{8}$.

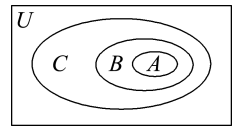
综上,$a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$.故选 C.

7.A **解析**:由 $a>1$ 且 $b>2\,024$ 可得 $a+b>2\,025$;

但当 $a+b>2\,025$ 时,推不出 $a>1$ 且 $b>2\,024$,如 $a=0$,$b=2\,026$.

故“$a>1$ 且 $b>2\,024$”是“$a+b>2\,025$”的充分不必要条件.故选 A.

8.C **解析**:由图可知 $(\complement_U A)\cap B$,$(\complement_U B)\cap C$,$A\cap B\cap C$ 都不是空集,$(\complement_U C)\cap A=\varnothing$.故选 C.



9.AC **解析**:因为 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,所以 $A\subseteq(B\cap C)$.因为 $B=\{2,0,1,8\}$,$C=\{1,9,3,8\}$,所以 $B\cap C=\{1,8\}$.所以 $A\subseteq\{1,8\}$.故选 AC.

10.AD **解析**:因为“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+x+1\geqslant 0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+x+1<0$”,所以 A 正确;

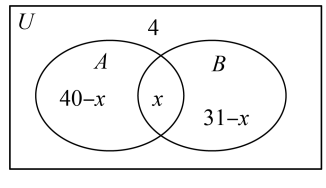
当 $a=b=0$ 时,满足 $a+b=0$,但 $\frac{b}{a}=-1$ 不成立,所以 B 错误;

当 $x=0$ 时,$x^2=0$,所以 C 错误;

当 $a>1,b>1$ 时,$ab>1$,所以充分性成立,所以 D 正确.

11.BC **解析**:由取整函数的定义知 $[2x]=2[x]$ 不一定成立,如 x 取 1.5 时,$[2x]=3$,$2[x]=2$,故 A 是假命题;当 x 取 1 时,$[2x]=2$,$2[x]=2$,故 B 是真命题;设 $x=n+a(n\in\mathbf{Z},0\leqslant a<1)$,$y=m+b(m\in\mathbf{Z},0\leqslant b<1)$,若 $[x]=[y]$,则 $n=m$,因此 $x-y=a-b\leqslant a<1$,故 C 是真命题;当 x 取 1.6,y 取 1.6 时,$[x+y]=[3.2]=3$,$[x]+[y]=1+1=2$,故 D 是假命题.故选 BC.

12.25 **解析**:根据题意,可设全集 U 表示全班学生,集合 A 表示做对物理实验的学生,B 表示做对化学实验的学生,并将两种实验都做对的学生人数记为 x,如图所示.



所以 $(40-x)+x+(31-x)+4=50$,解得 $x=25$.

故两种实验都做对的学生为 25 人.

13. $\{a\mid a\leqslant 1\}$ **解析**:由题意知,当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$a\leqslant x$ 恒成立,所以 $a\leqslant 1$.

14. $\{60,120,180\}$ $\{x\mid x=60n,n\in\mathbf{N}^*\}$ **解析**:因为三女相会经过的天数是 5,4,3 的公倍数,且它们的最小公倍数为 60,所以三女前三次相会经过的天数组成的集合用列举法可表示为 $\{60,120,180\}$.此三女相会经过的天数组成的集合用描述法可表示为 $\{x\mid x=60n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

15.解:(1)选择①$a=-1$,则 $A=\{x\mid -3<x<0\}$,

所以 $A\cup B=\{x\mid -3<x\leqslant 1\}$.

选择②$a=0$，则 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$.

选择③$a=1$，则 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$.

(2)由题意知，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<0$，或 $x>1\}$，因为 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=A$，所以 $A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$.

若 $2a-1\geqslant a+1$，即 $a\geqslant 2$，则 $A=\varnothing$，满足题意；

若 $2a-1<a+1$，即 $a<2$，

由 $A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$，得 $a+1\leqslant 0$ 或 $2a-1\geqslant 1$，

解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$.

所以 $a\leqslant -1$ 或 $1\leqslant a<2$.

综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -1$，或 $a\geqslant 1\}$.

16.解：(1)因为集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，

集合 $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，且 $A\cap B=\{2\}$，

所以 $2\in A$，所以 $4-2a+a^2-19=0$，即 $a^2-2a-15=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=5$.

当 $a=-3$ 时，$A=\{x\mid x^2+3x-10=0\}=\{-5,2\}$，$A\cap B=\{2\}$，符合题意；

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，$A\cap B=\{2,3\}$，不符合题意.

综上，实数 a 的值为 -3.

(2)因为 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，

所以 $3\in A$，$-4\notin A$，$2\notin A$，

所以 $9-3a+a^2-19=0$，即 $a^2-3a-10=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=5$.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{-5,3\}$，满足题意；

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，不满足题意.

综上，实数 a 的值为 -2.

17.解：(1)因为 $0\in(B\cap C)$，所以 $0\in C$，

所以 $a^2+2a-3=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-3$.

当 $a=-3$ 时，$B=\{x\mid -5<x<-1\}$，不满足 $0\in B$，故舍去；

当 $a=1$ 时，$B=\{x\mid -1<x<3\}$，满足题意.

综上，实数 a 的值为 1.

(2)选择条件①.

由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$，

所以 $\begin{cases}a+2\geqslant 2,\\ a-2\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

选择条件②.

由 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，得 $A\subseteq B$，

所以 $\begin{cases}a+2\geqslant 2,\\ a-2\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

选择条件③.

由 $B\cup\complement_{\mathbf{R}}A=\mathbf{R}$，得 $A\subseteq B$，

所以 $\begin{cases}a+2\geqslant 2,\\ a-2\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

18.解：(1)若命题 p 为真命题，即 $\exists x\in\{x\mid 6\leqslant x\leqslant 20\}$，$x<2a$，则 $6<2a$，所以 $a>3$.

若命题 q 为真命题，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x-a>0$，

则 $\Delta=2^2+4a<0$，解得 $a<-1$.

因为命题 p 和命题 $\neg q$ 有且只有一个为假命题，

所以当命题 p 为假命题，命题 $\neg q$ 为真命题时，

$\begin{cases}a\leqslant 3,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$；

当命题 p 为真命题，命题 $\neg q$ 为假命题时，

$\begin{cases}a>3,\\ a<-1,\end{cases}$ 解得 $a\in\varnothing$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 3\}$.

(2)由(1)知，若命题 p 和命题 q 都为假命题，

则 $\begin{cases}a\leqslant 3,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 即 $-1\leqslant a\leqslant 3$.

因为命题 p 和命题 q 至少有一个为真命题，所以 $a>3$ 或 $a<-1$，即实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a>3$，或 $a<-1\}$.

19.解：(1)全集 U 中，$x=(a\oplus b)+(a\otimes b)=ab+\dfrac{a-b}{(a+b)^2+1}$，$-2<a\leqslant b<1$，且 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，

当 $a=-1$ 时，$b=0$ 或 $b=-1$，此时 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=1$；

当 $a=0$ 时，$b=0$，此时 $x=0$，所以 $U=\left\{-\frac{1}{2},0,1\right\}$.

集合 A 中，$x=2(a\oplus b)+\frac{a\otimes b}{b}=2ab+\frac{a-b}{b[(a+b)^2+1]}$，$-1<a<b<2$，且 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，

当 $a=0$ 时，$b=1$，此时 $x=-\frac{1}{2}$，即 $A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

(2)因为 $\complement_U A=\{0,1\}$，所以当 $B\cap\complement_U A=\varnothing$ 时，$B=\varnothing$ 或 $B=A$.

当 $B=\varnothing$ 时，方程无实数根，则 $\Delta=(-3)^2-4m<0$，解得 $m>\frac{9}{4}$；

当 $B=A$ 时，方程 $x^2-3x+m=0$ 有两个相等的实数根 $-\frac{1}{2}$，

则 $\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+m=0,\\(-3)^2-4m=0,\end{cases}$ 此时 m 的值不存在.

综上，实数 m 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m>\frac{9}{4}\right\}$.

单元测试卷(二)

1.D　**解析**：由 $x^2-2<0$ 化简得 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})<0$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.故选 D.

2.D

3.A　**解析**：因为 $x>0$，$y>0$，$x+3y=6$，所以 $x+3y=6\geqslant 2\sqrt{3xy}$，所以 $xy\leqslant 3$，当且仅当 $x=3y=3$ 时，即当 $x=3$，且 $y=1$，等号成立，故 xy 的最大值为 3.故选 A.

4.A　**解析**：因为 $-1\leqslant a\leqslant 3$，$2\leqslant b\leqslant 4$，可得 $-2\leqslant 2a\leqslant 6$，$-4\leqslant -b\leqslant -2$，所以 $-2-4\leqslant 2a-b\leqslant 6-2$，即 $-6\leqslant 2a-b\leqslant 4$.

5.D　**解析**：原不等式等价于 $\begin{cases}x+1\neq 0,\\(x-2)(x+1)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant 2$.故选 D.

6.B　**解析**：因为 a，b 都是正实数，且 $a\neq b$，

所以 $A=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，即 $A>2$.

$B=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2\leqslant 2$，即 $B\leqslant 2$.

所以 $A>B$.

7.D　**解析**：将不等式 $x^2-(k+1)x+k<0$ 因式分解，可得 $(x-1)(x-k)<0$，

当 $k>1$ 时，此时不等式 $(x-1)(x-k)<0$ 的解集为 $\{x\mid 1<x<k\}$，

因为解集中恰有 2 个整数，所以这两个整数应为 2 和 3，所以 $3<k\leqslant 4$；

当 $k=1$ 时，不等式变为 $(x-1)^2<0$，因为任何实数的平方都大于或等于 0，所以此时不等式无解，不符合题意；

当 $k<1$ 时，此时不等式 $(x-1)(x-k)<0$ 的解集为 $\{x\mid k<x<1\}$，

因为解集中恰有 2 个整数，所以这两个整数应为 -1 和 0，所以 $-2\leqslant k<-1$.

综上，实数 k 的取值范围为 $\{k\mid -2\leqslant k<-1$ 或 $3<k\leqslant 4\}$.故选 D.

8.A　**解析**：因为 $a>b>0$，所以 $b(a-b)\leqslant\left[\frac{b+(a-b)}{2}\right]^2=\frac{a^2}{4}$，当且仅当 $b=a-b$，即 $a=2b$ 时，等号成立.所以 $\frac{2}{b(a-b)}\geqslant\frac{8}{a^2}$，所以 $2a^2+\frac{2}{b(a-b)}\geqslant 2a^2+\frac{8}{a^2}\geqslant 2\sqrt{2a^2\cdot\frac{8}{a^2}}=8$，当且仅当 $2a^2=\frac{8}{a^2}$，即 $a=\sqrt{2}$ 时，等号成立，其中第一个不等式等号成立的条件为 $a=2b$，第二个不等式等号成立的条件为 $a=\sqrt{2}$，所以当 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$2a^2+\frac{2}{b(a-b)}$ 取最小值，此时 $a+2b=2\sqrt{2}$.故选 A.

9.ACD　**解析**：对于 A，因为 $a<b<0$，所以 $a^2+c-(b^2+c)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$，故 $a^2+c>b^2+c$，故选项 A 正确；

对于 B，因为 $a<b<0$，所以 $a^2>b^2$，当 $c=0$ 时，$a^2c=b^2c$，故选项 B 错误；

对于 C，因为 $a<b<0$，所以 $a+c^2-(b+c^2)=a-b<0$，故 $a+c^2<b+c^2$，故选项 C 正确；

对于 D，因为 $a<b<0$，所以 $ac^2-b-(bc^2-a)=(a-b)\cdot(c^2+1)<0$，故 $ac^2-b<bc^2-a$，故选项 D 正确.故选 ACD.

10.AD　**解析**：因为函数 $y=x^2+ax+b(a\neq 0)$ 有且只有一个零点，

所以 $\Delta=a^2-4b=0$，即 $a^2=4b>0$.

$a^2-b^2\leqslant 4$ 等价于 $b^2-4b+4\geqslant 0$，即 $(b-2)^2\geqslant 0$，显然成立，故 A 正确；

$a^2+\frac{1}{b}=4b+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{4b\cdot\frac{1}{b}}=4$，当且仅当 $4b=\frac{1}{b}$，

即 $b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 B 错误；

因为不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为 $\{x\mid x_1<x<x_2\}$，

所以 $x_1x_2=-b<0$，故 C 错误；

因为不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为 $\{x\mid 1<x<3\}$，

所以实数 1 与 3 是方程 $x^2+ax+b-c=0$ 的两个根，

所以 $-a=1+3=4$，则 $a=-4$，从而 $b=4$.

又 $b-c=1\times 3=3$，所以 $c=b-3=1$，故 D 正确.

11. AD　**解析**：因为 $a>1,b>1$，所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，所以 $1=ab-(a+b)\leqslant ab-2\sqrt{ab}$，解得 $\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{2}+1$ 或 $\sqrt{ab}\leqslant 1-\sqrt{2}$（舍去），所以 $\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{2}+1$，$ab\geqslant(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$，所以 ab 有最小值 $3+2\sqrt{2}$；因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，所以 $1=ab-(a+b)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(a+b)$，所以 $(a+b)^2-4(a+b)\geqslant 4$，所以 $[(a+b)-2]^2\geqslant 8$，解得 $a+b\geqslant 2\sqrt{2}+2$ 或 $a+b\leqslant 2-2\sqrt{2}$（舍去），所以 $a+b\geqslant 2(\sqrt{2}+1)$，所以 $a+b$ 有最小值 $2(\sqrt{2}+1)$.

12. $a<0<b$　**解析**：若 $ab<0$，由 $a<b$ 两边同乘 $\frac{1}{ab}$，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；若 $ab>0$，由 $a<b$ 两边同乘 $\frac{1}{ab}$，可得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

所以 $a<b$ 和 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 同时成立的条件是 $a<0<b$.

13. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$　**解析**：由题意知方程 $x^2-ax-b=0$ 的根为 2，3，

由根与系数的关系得 $a=5,b=-6$.

所以不等式 $bx^2-ax-1>0$ 为 $-6x^2-5x-1>0$，即 $6x^2+5x+1<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

所以不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$.

14. $0<DN<1$ 或 $DN>4$　**解析**：设 $ND=x(x>0)$，根据矩形的性质，易知 $\triangle NDC\backsim\triangle CBM$，可得 $\frac{ND}{CB}=\frac{DC}{BM}$，代入可得 $\frac{x}{2}=\frac{3}{BM}$，解得 $BM=\frac{6}{x}$.

矩形花坛 $AMPN$ 的面积为 $S=(x+2)\left(3+\frac{6}{x}\right)=3x+\frac{12}{x}+12$.

令 $3x+\frac{12}{x}+12>27$，则 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)>0$，解得 $x<1$ 或 $x>4$.

综上，$0<DN<1$ 或 $DN>4$.

15.(1)**解**：因为 $a+b=3ab$，所以 $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$.

所以 $a+b=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=\frac{4}{3}$.

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=\frac{2}{3}$ 时等号成立.

(2)**证明**：因为 $a>0,b>0$，所以要证 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant\frac{8}{9ab}$，只需证 $a^2+b^2\geqslant\frac{8}{9}$.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a+b)^2-\frac{2(a+b)}{3}$，

令 $t=a+b$，由(1)得 $t\geqslant\frac{4}{3}$，

所以 $a^2+b^2=t^2-\frac{2t}{3}=\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$.

当 $t=\frac{4}{3}$ 时，$t^2-\frac{2t}{3}$ 取得最小值 $\frac{8}{9}$.

所以 $a^2+b^2\geqslant\frac{8}{9}$.

原不等式得证.

16.解：(1)设 $y_1=\frac{k}{x}$，$y_2=mx$，

由题意知，当 $x=10$ 时，y_1 和 y_2 的值分别为 2 和 8，

即 $\frac{k}{10}=2$，$10m=8$，解得 $k=20$，$m=\frac{4}{5}$，

所以 $y_1=\frac{20}{x}(x>0)$，$y_2=\frac{4}{5}x(x>0)$.

若使每月土地占用费与每月库存货物费之和不超过 10 万元，则 $\frac{20}{x}+\frac{4}{5}x\leqslant 10$.

因为 $x>0$，所以 $2x^2-25x+50\leqslant 0$，即 $(2x-5)(x-10)\leqslant 0$，解得 $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 10$.

(2)由(1)知，$y_1+y_2=\frac{20}{x}+\frac{4}{5}x$，$x>0$，

由基本不等式得 $y_1+y_2=\frac{20}{x}+\frac{4}{5}x\geqslant 2\sqrt{\frac{20}{x}\cdot\frac{4}{5}x}=2\sqrt{16}=8$，

当且仅当 $\frac{20}{x}=\frac{4}{5}x$，即 $x=5$ 时，等号成立.

所以把仓库建在离车站 5 km 处，才能使两项费用之和最小，最小费用为 8 万元.

17.(1)**证明**：由题意得$(a+b)^2=3ab+1\leqslant 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1$，

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

解得$(a+b)^2\leqslant 4$.

又 $a>0,b>0$，所以 $a+b\leqslant 2$.

(2)**解**：不能成立.

理由：由基本不等式得$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}$，

当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时等号成立.

因为 $a+b\leqslant 2$，所以$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant 1+\frac{c+d}{2}$.

因为 $c>0,d>0,cd>1$，所以$c+d=\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2}\geqslant\frac{c+d}{2}+\sqrt{cd}>\frac{c+d}{2}+1\geqslant\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$.

故$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=c+d$ 不能成立.

18.解：(1)当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $1\geqslant 0$ 恒成立；

当 $a\neq 0$ 时，则$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4a^2-4a\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $0<a\leqslant 1$.

综上，a 的取值范围为$\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 1\}$.

(2)由 $x^2-x-a^2+a<0$，得$(x-a)[x-(1-a)]<0$.

又由(1)知 $0\leqslant a\leqslant 1$，则

①当 $1-a>a$，即$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时，$a<x<1-a$；

②当 $1-a=a$，即$a=\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<0$，不等式无解；

③当 $1-a<a$，即$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时，$1-a<x<a$.

综上所述，当$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\{x\mid a<x<1-a\}$；

当$a=\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\varnothing$；

当$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时，不等式的解集为$\{x\mid 1-a<x<a\}$.

19.(1)**证明**：由根与系数的关系得，

$x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=n$，

所以$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-m)^2-4n=4$，

所以 $m^2=4n+4$.

(2)**解**：$\frac{x_1^2}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]}{x_1x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{(-m)[(-m)^2-3n]}{n}-\frac{4}{-m}$

$=-\frac{m^3}{n}+3m+\frac{4}{m}=-\frac{4m^3}{m^2-4}+3m+\frac{4}{m}$

$=-\frac{4m^3-16m+16m}{m^2-4}+3m+\frac{4}{m}$

$=-4m-\frac{16m}{m^2-4}+3m+\frac{4}{m}=-m+\frac{4}{m}+\frac{16}{-m+\frac{4}{m}}$.

因为 $m\leqslant -4$，所以$-m+\frac{4}{m}>0$，

所以$-m+\frac{4}{m}+\frac{16}{-m+\frac{4}{m}}\geqslant 2\sqrt{16}=8$，

当且仅当$-m+\frac{4}{m}=\frac{16}{-m+\frac{4}{m}}$，即 $m=-2-2\sqrt{2}$ 时，等号成立，

所以$\frac{x_1^2}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$的最小值为 8.

单元测试卷(三)

1.B　**解析**：函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x>0,\\ \pi,x=0,\\ x^2-1,x<0,\end{cases}$则 $f(-1)=(-1)^2-1=0$，所以 $f(f(-1))=f(0)=\pi$.故选 B.

2.D　**解析**：对于 A，函数图象关于 y 轴对称，该函数是偶函数，故选项 A 不符合题意；

对于 B，不满足函数的定义，故选项 B 不符合题意；

对于 C，函数图象关于原点对称，该函数是奇函数，故选项 C 不符合题意；

对于 D，函数图象不关于 y 轴对称，且不关于原点对称，该函数既不是奇函数也不是偶函数，故选项 D 符合题意.

故选 D.

3.C　**解析**：依题意，$\begin{cases}-x^2-3x+4\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$解得$-4\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，所以 $f(x)$的定义域是$[-4,0)\cup(0,1]$.故选 C.

4.A　**解析**：由函数$f(x)=\frac{x}{(2x-1)(x+a)}$为奇函数，可得$f(-x)=-f(x)$，所以$\frac{-x}{(-2x-1)(-x+a)}=-\frac{x}{(2x-1)(x+a)}$，所以$-x(2x-1)(x+a)=-x\cdot$

$(-2x-1)(-x+a)$，化简得 $2(2a-1)x^2=0$ 恒成立，所以 $2a-1=0$，即 $a=\frac{1}{2}$.故选 A.

5.A　**解析**：函数 $f(x)=|4-x|\cdot(x-1)=\begin{cases}(x-4)(x-1),x\geqslant 4,\\(4-x)(x-1),x<4,\end{cases}$ 即 $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+4,x\geqslant 4,\\-x^2+5x-4,x<4.\end{cases}$

当 $x\geqslant 4$ 时，$y=x^2-5x+4$ 单调递增；

当 $x<4$ 时，$y=-x^2+5x-4$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{5}{2},4\right)$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{5}{2},4\right)$.故选 A.

6.A　**解析**：当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2-ax+5=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+5-\frac{a^2}{4}$.

因为函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+5,x\leqslant 1,\\3-x,x>1\end{cases}$ 在 **R** 上是减函数，

所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 1,\\1-a+5\geqslant 3-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\geqslant 2,\\a\leqslant 4.\end{cases}$

故实数 a 的取值范围是 $[2,4]$.故选 A.

7.A　**解析**：因为 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2-6}$ 是幂函数，所以 $m^2-m-5=1$，解得 $m=-2$ 或 $m=3$.因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m^2-6>0$，故 $m=3$，所以 $f(x)=x^3$ 为奇函数且为 **R** 上的增函数.若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0$，则 $a>-b$，所以 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，所以 $f(a)+f(b)>0$.故选 A.

8.A　**解析**：因为对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$ 成立，即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$ 成立，所以 $g(x)=f(x)-x$ 在 **R** 上是增函数.

因为 $f(1+x^2)+f(1-3x)<x^2-3x+2$，所以 $f(1+x^2)-(1+x^2)<-f(1-3x)-(3x-1)$.

又因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，

所以 $-f(1-3x)=f(3x-1)$，

所以 $f(1+x^2)-(1+x^2)<f(3x-1)-(3x-1)$.

由 $g(x)$ 在 **R** 上单调递增可知，$1+x^2<3x-1$，解得 $1<x<2$.

故选 A.

9.AD　**解析**：$y=x^2$ 是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 满足；

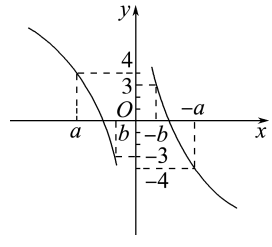
$y=x$ 是奇函数，故 B 不满足；

$y=\left|\frac{1}{x}\right|$ 是偶函数，但在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 C 不满足；

$y=|x|$ 是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 满足.

故选 AD.

10.BC　**解析**：(方法一)根据题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减，作出函数 $y=f(x)$ 的简图，如图所示.由图知，B,C 正确.



(方法二)由题可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减.

当 $x\in[-b,-a]$ 时，$-x\in[a,b]$，

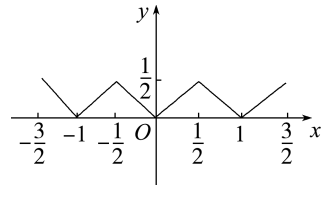
则有 $f(b)\leqslant f(-x)\leqslant f(a)$，

即 $-3\leqslant -f(x)\leqslant 4$，所以 $-4\leqslant f(x)\leqslant 3$.

故在区间 $[-b,-a]$ 上，$f(x)_{\min}=-4$，$f(x)_{\max}=3$.

11.ABC　**解析**：根据 $\{x\}$ 的定义知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 **R**，$\{x\}-\frac{1}{2}<x\leqslant\{x\}+\frac{1}{2}$，即 $-\frac{1}{2}<x-\{x\}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $0\leqslant|x-\{x\}|\leqslant\frac{1}{2}$，函数 $y=f(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$，A 正确；

函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，由图可知 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{k}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 对称，B 正确；



由图象知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，C 正确；

由图象知 D 不正确.

故选 ABC.

12.1

13.1　**解析**：由题意知，$f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}+1$，设 $g(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}$，则 $g(-x)=\frac{-x^3-2x}{x^2+1}=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数.所以 $g(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小

值的和为0，故$M+N=2$，$(M+N-1)^{2\,025}=(2-1)^{2\,025}=1$.

14. ±1 $[1,2]$ **解析**：当$a<1$时，$f(a)=a^2-a^2=0$，所以$f(f(a))=f(0)=a^2=1$，所以$a=-1$；当$a\geqslant1$时，$f(a)=a^2-a^2=0$，所以$f(f(a))=f(0)=a^2=1$，所以$a=1$.故$a=\pm1$.

因为不等式$f(x)\geqslant f(1)$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，所以当$x=1$时，$f(x)$取得最小值，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,1)$上单调递减，所以

$$\begin{cases}-a<0,\\ \dfrac{a}{2}\leqslant1,\\ a^2-a\times1\geqslant1^2-a\times1,\end{cases}$$ 解得$1\leqslant a\leqslant2$.

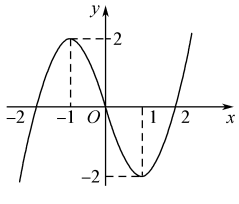
所以a的取值范围是$[1,2]$.

15.解：(1)当$x<0$时，$-x>0$，$f(-x)=2x^2+4x$.

由$f(x)$是奇函数，得$f(x)=-f(-x)=-2x^2-4x$$(x<0)$.

所以$f(x)=\begin{cases}2x^2-4x,x\geqslant0,\\ -2x^2-4x,x<0.\end{cases}$

根据奇函数的图象关于原点对称这一性质即可补全函数$f(x)$的图象，如图所示.



对于不等式$xf(x)>0$，当$x>0$时，$f(x)>0$，由图可知$x>2$；

当$x<0$时，$f(x)<0$，由图可知$x<-2$.

综上，不等式$xf(x)>0$的解集为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(2)由(1)中图象可知，函数$f(x)$的单调递减区间是$[-1,1]$，

要使$f(x)$在$[-1,a-2]$上单调递减，

则$\begin{cases}a-2>-1,\\ a-2\leqslant1,\end{cases}$ 解得$1<a\leqslant3$.

所以实数a的取值范围是$(1,3]$.

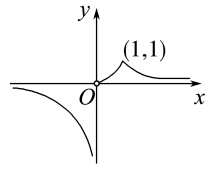
16.解：设$f(x)=x^{\alpha}$，因为点$(\sqrt{2},2)$在幂函数$f(x)$的图象上，所以$(\sqrt{2})^{\alpha}=2$，解得$\alpha=2$，所以$f(x)=x^2$.

设$g(x)=x^{\beta}$，因为点$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$在幂函数$g(x)$的图象上，所以$2^{\beta}=\dfrac{1}{2}$，解得$\beta=-1$，所以$g(x)=x^{-1}$.

在同一平面直角坐标系中画出函数$f(x)=x^2$和$g(x)=x^{-1}$的图象(图略).

由题意及图，可知$h(x)=\begin{cases}x^{-1},x<0\text{ 或 }x>1,\\ x^2,0<x\leqslant1.\end{cases}$

作出函数$h(x)$的图象，如图所示.



由图可知函数$h(x)$的最大值为1，

$h(x)$的单调递增区间是$(0,1)$，单调递减区间是$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$.

17.解：(1)因为函数$f(x)=\dfrac{ax-b}{4-x^2}$是定义在$(-2,2)$上的奇函数，所以$f(0)=-\dfrac{b}{4}=0$，解得$b=0$.

又$f(1)=\dfrac{1}{3}$，即$\dfrac{a-b}{3}=\dfrac{1}{3}$，解得$a=1$，所以$f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$.

又因为对$\forall x\in(-2,2)$，$f(-x)=\dfrac{-x}{4-(-x)^2}=-\dfrac{x}{4-x^2}=-f(x)$，所以函数$f(x)$是奇函数，

所以函数$f(x)$的解析式是$f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$，$x\in(-2,2)$.

(2)任取$x_1,x_2\in(-2,2)$，$x_1<x_2$，则$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{x_2}{4-x_2^2}-\dfrac{x_1}{4-x_1^2}=\dfrac{(x_2-x_1)(4+x_1x_2)}{(4-x_2^2)(4-x_1^2)}$.

因为$-2<x_1<x_2<2$，所以$x_2-x_1>0$，$4+x_1x_2>0$，$4-x_1^2>0$，$4-x_2^2>0$，

所以$f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_2)>f(x_1)$，故$f(x)$在$(-2,2)$上单调递增.

由(1)知，不等式$f(t-1)+f(t)<0\Leftrightarrow f(t-1)<-f(t)\Leftrightarrow f(t-1)<f(-t)$，

从而$-2<t-1<-t<2$，解得$-1<t<\dfrac{1}{2}$，

所以所求不等式的解集为$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

18.解：(1)由题可知，$L(x)=6x-3-W(x)$，

所以$L(x)=\begin{cases}6x-3-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right),0<x<6,\\ 6x-3-\left(7x+\dfrac{81}{x}-37\right),x\geqslant6\end{cases}$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+5x-3, 0<x<6,\\ -x-\frac{81}{x}+34, x\geqslant 6.\end{cases}$$

(2)当 $0<x<6$ 时，$L(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x-3=-\frac{1}{2}\cdot(x-5)^2+\frac{19}{2}$.

由二次函数的性质知，图象的对称轴为直线 $x=5$，开口向下，

所以当 $x=5$ 时，$L(x)$取得最大值$\frac{19}{2}$；

当 $x\geqslant 6$ 时，$L(x)=-x-\frac{81}{x}+34\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{81}{x}}+34=16$，当且仅当 $x=\frac{81}{x}$，即 $x=9$ 时，等号成立.

因为 $16>\frac{19}{2}$，所以年产量为 9 万件时，年利润最大，最大年利润是 16 万元.

19.解：(1)函数 $f(x)$为奇函数，在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$上单调递增.

证明如下：

由题意知函数 $f(x)=x+\frac{k}{x}(k\in\mathbf{R},k<0)$的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，

又 $f(-x)=-x+\frac{k}{-x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$为奇函数.

任取 $0<x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{k}{x_1}-x_2-\frac{k}{x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-k)}{x_1x_2}$.

因为 $0<x_1<x_2$，$k<0$，所以 $x_1-x_2<0$，$-k>0$，

$x_1x_2>0$，$x_1x_2-k>0$，

所以$\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-k)}{x_1x_2}<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

即函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又因为 $f(x)$为奇函数，所以函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递增.

综上，函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$上单调递增.

(2)$F(x)=x^2+\frac{4}{x^2}-2a\left(x-\frac{2}{x}\right)=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2a\left(x-\frac{2}{x}\right)+4$，

设 $t=x-\frac{2}{x}$，$x\in[1,2]$，由(1)知 $t=x-\frac{2}{x}$在$[1,2]$上单调递增，则 $t\in[-1,1]$，

所以 $F(x)$即为 $h(t)=t^2-2at+4$，$t\in[-1,1]$，其图象的对称轴为直线 $t=a$.

当 $a\leqslant -1$ 时，$h(t)$在$[-1,1]$上单调递增，则 $g(a)=h(-1)=5+2a$；

当 $-1<a<1$ 时，$h(t)$在$(-1,a)$上单调递减，在$(a,1)$上单调递增，

则 $g(a)=h(a)=-a^2+4$；

当 $a\geqslant 1$ 时，$h(t)$在$[-1,1]$上单调递减，则 $g(a)=h(1)=5-2a$.

综上，$g(a)=\begin{cases}5+2a, a\leqslant -1,\\ -a^2+4, -1<a<1,\\ 5-2a, a\geqslant 1.\end{cases}$

阶段测试卷

1.D **解析**：$A=\{x\mid 3x+2>0\}=\left\{x\,\middle|\,x>-\frac{2}{3}\right\}$，$B=\{x\mid x>0$ 或 $x<-2\}$，则 $A\cap B=\{x\mid x>0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=(-\infty,0]$.故选 D.

2.B **解析**：对于 A，$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$的定义域为$\{x\mid x\neq\pm 1\}$，而 $g(x)=\frac{1}{x+1}$的定义域为$\{x\mid x\neq -1\}$，定义域不同，故选项 A 不符合题意；

对于 B，两个函数的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $g(x)=|x|=f(x)$，所以两个函数为同一个函数，故选项 B 符合题意；

对于 C，$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，而 $g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，定义域不同，故选项 C 不符合题意；

对于 D，$f(x)=|x-2\,025|$，两个函数的对应关系不同，故选项 D 不符合题意.故选 B.

3.A **解析**：“前程万里，毛羽须丰”的意思就是要想前程万里，毛羽必须先丰满，

故题意即是“毛羽须丰”是实现“前程万里”的必要条件，所以“前程万里”是“毛羽须丰”的充分条件，但只有羽毛丰满，不奋飞，也不能“前程万里”，所以“前程万里”是“毛羽须丰”的不必要条件.综上所述，“前程万里”是“毛羽须丰”的充分不必要条件.故选 A.

4.A **解析**：当 $x\in[-10,6]$时，$0\leqslant -x+6\leqslant 16$，则 $0\leqslant\sqrt{-x+6}\leqslant 4$；

当 $x\in(6,8]$时，$0<x-6\leqslant 2$，则 $-1\leqslant -\frac{1}{2}(x-6)<0$.所以函数 $f(x)$的值域为$[-1,4]$.故选 A.

5.B　**6.**D

7.B　**解析**：由基本不等式，可得 $a(2b+c)=2ab+ac\leqslant\frac{4a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}=\frac{5a^2+b^2+c^2}{2}=2$，当且仅当 $2a=b$，$a=c$ 时，等号成立，可取 $a=c=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$b=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以 $a(2b+c)$ 的最大值为 2.故选 B.

8.D　**解析**：对于 A，当 $f(x)=-1$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-x_1+x_2}{x_1-x_2}=-1<0$，因此 $f(x)=-1$ 不是“理想函数”，故 A 错误.

对于 B，当 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}<0$，所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 不是“理想函数”，故 B 错误.

对于 C，当 $f(x)=x-1$ 时，取 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}=0$，所以 $f(x)=x-1$ 不是“理想函数”，故 C 错误.

对于 D，当 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2>0$，所以 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 是“理想函数”，故 D 正确.故选 D.

9.BCD　**解析**：对于 A，空集是任何集合的子集，故选项 A 正确；

对于 B，空集只有一个子集，即空集本身，故选项 B 错误；

对于 C，由 $x^3=x$，得 $x=0$ 或 -1 或 1，因为 $x\in\mathbf{N}$，所以 $x=0$ 或 1，用列举法表示为 $\{0,1\}$，故选项 C 错误；

对于 D，由 $\begin{cases}x+y=0,\\x-y=-1,\end{cases}$ 得 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，点集为 $\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$，故选项 D 错误.故选 BCD.

10.BD

11.AC　**解析**：对于 A，令 $x=\frac{1}{4}$，$y=0$，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)f(0)=0$，结合 $f\left(\frac{1}{4}\right)\neq0$，

可得 $1+f(0)=0$，所以 $f(0)=-1$.

令 $x=\frac{1}{4}$，$y=-\frac{1}{4}$，则 $f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$，即 $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(-\frac{1}{4}\right)=0$，

而 $f\left(\frac{1}{4}\right)\neq0$，故 $f\left(-\frac{1}{4}\right)=0$，故 A 正确.

对于 C，令 $x\in\mathbf{R}$，$y=-\frac{1}{4}$，则 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)+f(x)\cdot f\left(-\frac{1}{4}\right)=-4x$，

即 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)=-4x$，该函数为奇函数，故 C 正确.

对于 B，由 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)=-4x$，令 $x=\frac{1}{2}$，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)=-4\times\frac{1}{2}=-2$，故 B 错误.

对于 D，由于 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)=-4x$，用 $x+\frac{1}{2}$ 代换 x，可得 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)=-4x-2$，

该函数为减函数，故 D 错误.故选 AC.

12.-2　**解析**：根据题意，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1$，则 $f(1)=1+1=2$.

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(-1)=-f(1)=-2$，故 $f(-1)+f(0)=-2$.

13.$[0,4)$　**解析**：“$\exists x\in\mathbf{R},kx^2+kx+1\leqslant0$”是假命题，则有 $\forall x\in\mathbf{R},kx^2+kx+1>0$.

当 $k=0$ 时，$1>0$ 恒成立，满足题意；当 $k\neq0$ 时，有 $\begin{cases}k>0,\\\Delta=k^2-4k<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<4$.

综上所述，k 的取值范围为 $[0,4)$.

14.$\left[\frac{20}{3},12\right]$　**解析**：由题得函数 $f(x)=\frac{-ax}{x^2+1}=\frac{-a}{x+\frac{1}{x}}$（$a>0$），因为 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，

所以，由复合函数单调性知，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上单调递增，

$f(x)_{\max}=f(3)=\frac{-3a}{10}$，$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{-a}{2}$.

易知函数 $g(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 在区间 $[2,3]$ 上单调递减，

$g(x)_{\max}=g(2)=-2$，$g(x)_{\min}=g(3)=-6$.

由题意得 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$ 且 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$ 成立，

即 $-\frac{3a}{10}\leqslant-2$ 且 $-\frac{a}{2}\geqslant-6$，解得 $\frac{20}{3}\leqslant a\leqslant12$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{20}{3},12\right]$.

15.解：(1)由题设得 $f(0)=c=4$，

则 $ax^2+bx+4<1$，即 $ax^2+bx+3<0$ 的解集为 $\{x|x<-1$，或 $x>3\}$，

所以 $\begin{cases}a<0,\\-\frac{b}{a}=2,\\\frac{3}{a}=-3,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$ 故 $f(x)=-x^2+2x+4$.

(2)因为 $g(x)=(k-1)x^2+2x+4<0$ 的解集为 $\varnothing$，

所以 $\begin{cases}k-1>0,\\\Delta=4-16(k-1)\leqslant 0,\end{cases}$ 可得 $k\geqslant\frac{5}{4}$.

所以实数 k 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$.

16.解：(1)解不等式 $x^2+x<2$，即 $x^2+x-2<0$，得 $-2<x<1$，则 $A=\{x|-2<x<1\}$.

当 $a=1$ 时，$B=\{x|-1<2x+1<4\}=\left\{x\middle|-1<x<\frac{3}{2}\right\}$，

所以 $A\cup B=\left\{x\middle|-2<x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2)依题意，$B=\left\{x\middle|\frac{-1-a}{2}<x<\frac{4-a}{2}\right\}$，$B\neq\varnothing$，

由“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，

得 B 是 A 的真子集.

又由(1)知 $A=\{x|-2<x<1\}$，

因此 $\begin{cases}\frac{-1-a}{2}\geqslant -2,\\\frac{4-a}{2}\leqslant 1,\end{cases}$ 其中等号不能同时取到，解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.

所以实数 a 的取值范围是 $[2,3]$.

17.(1)**解**：设 $f(x)=x^{\alpha}$，将 $\left(3,\frac{1}{3}\right)$ 代入解析式得 $3^{\alpha}=\frac{1}{3}$，

得 $\alpha=-1$，所以 $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$.

(2)**证明**：任取 $0<x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$，

因为 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

(3)**解**：$f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，$f(-x)=\frac{1}{-x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数.

由(2)可知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

由 $f(|5-x|)<f(|x-1|)$ 得 $\begin{cases}5-x\neq 0,\\x-1\neq 0,\\|5-x|>|x-1|,\end{cases}$

即 $\begin{cases}5-x\neq 0,\\x-1\neq 0,\\|5-x|^2>|x-1|^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\neq 5,\\x\neq 1,\\x<3.\end{cases}$

所以不等式 $f(|5-x|)<f(|x-1|)$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,3)$.

18.解：(1)该项目的门票收入为 $50x$ 万元，财政补贴收入为 $10x$ 万元，共 $60x$ 万元，则利润

$$W(x)=\begin{cases}60x-300-35,0<x\leqslant 6,\\60x-300-(x^2+20x-100),6<x\leqslant 25,\\60x-300-\left(61x+\frac{900}{x}-565\right),x>25,\end{cases}$$

化简得 $W(x)=\begin{cases}60x-335,0<x\leqslant 6,\\-x^2+40x-200,6<x\leqslant 25,\\-x-\frac{900}{x}+265,x>25.\end{cases}$

(2)①当 $0<x\leqslant 6$ 时，$W(x)$ 单调递增，

$W(x)_{\max}=W(6)=25$；

②当 $6<x\leqslant 25$ 时，对应二次函数的图象开口向下，对称轴为直线 $x=-\frac{40}{2\times(-1)}=20$，

则 $W(x)_{\max}=W(20)=200$；

③当 $x>25$ 时，$-\left(x+\frac{900}{x}\right)+265\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{900}{x}}+265=205$.

当且仅当 $x=\frac{900}{x}$，即 $x=30$ 时，等号成立，

所以 $W(x)_{\max}=205$.

综上所述，当今年的游客人数为 30 万时，利润最大，最大利润为 205 万元.

19.解：由题意可知，函数 $f(x)$ 的不动点即为 $f(x)-x=0$ 的实数根.

(1)当 $a=1$，$b=2$ 时，解方程 $x^2-4x=0$，得 $x=0$ 或 $x=4$，

所以函数 $f(x)$ 的不动点为 0 和 4.

(2)由题意可得方程 $2x^2-(b+1)x+2-b=x$ 有两个

不相等的实数根，

即 $2x^2-(b+2)x+2-b=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2，且 $0<x_1<1,x_2>1$.

设 $h(x)=2x^2-(b+2)x+2-b$，

则 $\begin{cases}h(0)=2-b>0,\\h(1)=2-(b+2)+2-b<0,\end{cases}$ 解得 $1<b<2$.

所以实数 b 的取值范围为 $(1,2)$.

(3)由题意可知 $-1,2$ 为方程 $f(x)=x$，即 $ax^2-(b+2)x+2-b=0$ 的两个根，

则 $\begin{cases}-1+2=\dfrac{b+2}{a},\\-1\times2=\dfrac{2-b}{a},\end{cases}$ 解得 $a=-4,b=-6$，

从而 $f(x)=-4x^2+5x+8$.

因为对任意 $x_1\in[1,2]$，总存在 $x_2\in[-1,1]$，使得 $f(x_1)g(x_2)=1$ 成立，即 $\dfrac{1}{f(x_1)}=g(x_2)$，

所以 $y=\dfrac{1}{f(x_1)}$ 的值域是 $y=g(x_2)$ 值域的子集.

因为 $f(x)=-4x^2+5x+8$ 在 $[1,2]$ 上是单调递减的，所以 $f(x)\in[2,9]$，

所以 $y=\dfrac{1}{f(x_1)}$ 的值域为 $\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{2}\right]$.

因为 $g(x)=mx-1$ 且 $x\in[-1,1]$，

当 $m=0$ 时，$g(x)=-1$，不合题意.

当 $m>0$ 时，$g(x)=mx-1$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，则 $-m-1\leqslant g(x)\leqslant m-1$.

因为 $\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq[-m-1,m-1]$，则 $\begin{cases}-m-1\leqslant\dfrac{1}{9},\\m-1\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $m\geqslant\dfrac{3}{2}$.

当 $m<0$ 时，$g(x)=mx-1$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数，则 $m-1\leqslant g(x)\leqslant-m-1$.

因为 $\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq[m-1,-m-1]$，则 $\begin{cases}m-1\leqslant\dfrac{1}{9},\\-m-1\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-\dfrac{3}{2}$.

综上，m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

单元测试卷(四)

1.C **解析**：由 $x^2-x>0$，得 $x>1$ 或 $x<0$.

2.B **解析**：令 $x-1=0$，得 $x=1$，则 $f(1)=1$，

所以函数 $f(x)$ 的图象恒过定点 $(1,1)$.

3.B **解析**：因为函数 $f(x)=\log_2x+2^x-3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(1)=\log_21+2^1-3=-1<0$，$f(2)=\log_22+2^2-3=2>0$，所以 $f(1)f(2)<0$.

根据函数零点存在定理可知，函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(1,2)$ 内.

4.C **解析**：因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性一定相反，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象均不过原点，故排除 A，D；在 B，C 选项中，过原点的图象为幂函数 $h(x)=x^a$ 的图象，由图象可知 $0<a<1$，所以 $f(x)=\log_ax$ 单调递减，$g(x)=a^{-x}$ 单调递增，故排除 B.故选 C.

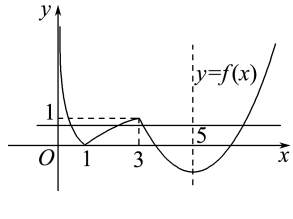
5.A **解析**：因为 $\log_2x\leqslant0$，所以 $0<x\leqslant1$，即 p：$0<x\leqslant1$.

因为 $2^x\leqslant2$，所以 $x\leqslant1$，即 q：$x\leqslant1$，所以 p 是 q 的充分不必要条件.故选 A.

6.D

7.A **解析**：因为 $2.3^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{1}{3}}$，选项 A 错误；因为 $0.4^{-2.5}=2.5^{2.5}>2^{2.5}>2^{1.6}>2^{-0.2}$，选项 B 正确；因为 $\log_{0.9}0.7>\log_{0.9}0.8>\log_{0.9}0.9>\log_{0.8}0.9$，选项 C 正确；$\log_23-\log_34=\dfrac{\lg3}{\lg2}-\dfrac{\lg4}{\lg3}=\dfrac{(\lg3)^2-\lg2\lg4}{\lg2\lg3}>\dfrac{(\lg3)^2-\left(\dfrac{\lg2+\lg4}{2}\right)^2}{\lg2\lg3}=\dfrac{(\lg9)^2-(\lg8)^2}{4\lg2\lg3}>0$，即 $\log_23>\log_34$，同理可得 $\log_34>\log_45$，即 $\log_23>\log_34>\log_45$，选项 D 正确.

8.C **解析**：由 $f(x)=\begin{cases}|\log_3x|,0<x\leqslant3,\\\dfrac{1}{2}x^2-5x+\dfrac{23}{2},x>3,\end{cases}$ 得其图象如下.



因为 $a<b<c<d$，且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，所以 $0<a<1<b<3$，且 $\dfrac{c+d}{2}=5$，即 $c+d=10$；由 $f(a)=f(b)$，得 $|\log_3a|=|\log_3b|$，即 $-\log_3a=\log_3b$，可得 $\log_3(ab)=0$，即 $ab=1$，所以 $ab(c+d)=1\times10=10$.故选 C.

9.BC　**解析**：若 $0<a<1$，则 $y=a^x-(b+1)$ 的图象必过第二象限，而函数 $y=a^x-(b+1)(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象过第一、三、四象限，所以 $a>1$.

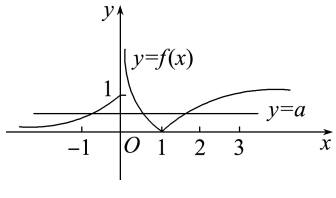
当 $a>1$ 时，要使 $y=a^x-(b+1)$ 的图象过第一、三、四象限，则 $b+1>1$，即 $b>0$.

故选 BC.

10.BC　**解析**：由题易知，$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 的定义域为 $(0,2)$，$f(x)=\ln[x(2-x)]=\ln[-(x-1)^2+1]$. 由复合函数的单调性知，函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，所以 A 错误，B 正确；$f(1-x)=\ln(1-x)+\ln(x+1)$，$f(1+x)=\ln(x+1)+\ln(1-x)$，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 C 正确；$f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{3}{4}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}+\ln\left(2-\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{4}$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{4}$，所以 D 错误. 故选 BC.

11.AB　**解析**：由 $f(x)-a=0$，得 $a=f(x)$.

在同一平面直角坐标系中作出函数 $y=f(x)$ 及 $y=a$ 的图象，如图所示.



$f(x)-a=0$ 有三个不同的实数根等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个不同的交点.

由图象知，当 $0<a\leqslant1$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个交点. 结合选项，可知实数 a 的值可以是 $\frac{1}{2}$ 或 1.

12.$(2,2.5)$　**解析**：因为 $f(2)<0$，$f(2.5)>0$，所以下一个有零点的区间为 $(2,2.5)$.

13.$\frac{1}{4}$　**解析**：因为 $f(x)=ae^x+e^{-x}$ 的图象关于直线 $x=\ln2$ 对称，所以 $f(\ln2+x)=f(\ln2-x)$，即 $ae^{\ln2+x}+e^{-(\ln2+x)}=ae^{\ln2-x}+e^{-(\ln2-x)}$，即 $a(2\cdot e^x)+\frac{1}{2\cdot e^x}=a(2\cdot e^{-x})+\frac{e^x}{2}$，所以 $2a\cdot e^x+\frac{1}{2e^x}=\frac{2a}{e^x}+\frac{e^x}{2}$，即 $4a\cdot e^{2x}+1=4a+e^{2x}$，

即 $(4a-1)\cdot e^{2x}=4a-1$. 因为 $e^{2x}>0$，所以 $4a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{4}$.

14.120　80　**解析**：因为随着时间的增加，种植成本先减少后增加，而且当 $t=60$ 和 $t=180$ 时种植成本相等，再结合题中给出的四种函数关系可知，种植成本与上市时间的变化关系应该用函数 $Q=at^2+bt+c$ 描述. 将表中数据 $(60,116)$，$(100,84)$ 和 $(180,116)$ 代入解析式，

可得 $\begin{cases}60^2a+60b+c=116,\\100^2a+100b+c=84,\\180^2a+180b+c=116,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=0.01,\\b=-2.4,\\c=224,\end{cases}$

所以 $Q=0.01t^2-2.4t+224=0.01(t-120)^2+80$.

故当上市天数为 120 时，种植成本取到最低，最低为 80 元/(100 kg).

故答案分别为 120 和 80.

15.解：(1)原式 $=\left(\frac{9}{4}\right)^{2\times0.5}-2\times\left(\frac{4}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}-2\times1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{4}-2\times\frac{9}{16}-2\times\frac{9}{16}=0$.

(2)原式 $=\log_535+\log_550-\log_514+\log_{2-1}(\sqrt{2})^2+3=\log_5\left(\frac{35\times50}{14}\right)-1+3=\log_55^3-1+3=5$.

16.解：(1)由题意知，$r_0=2$，$r_1=1.94$，

所以当 $n=1$ 时，$r_1=r_0-(r_0-r_1)\cdot5^{0.5+p}$，

即 $1.94=2-(2-1.94)\times5^{0.5+p}$，解得 $p=-0.5$，

所以 $r_n=2-0.06\times5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$.

故改良工艺后所排放的废气中污染物的含量关于改良工艺的次数 n 的函数解析式为 $r_n=2-0.06\times5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由题意可得，$r_n=2-0.06\times5^{0.5n-0.5}\leqslant0.08$，

整理得 $5^{0.5n-0.5}\geqslant32$，

两边同时取常用对数，得 $0.5n-0.5\geqslant\frac{\lg32}{\lg5}$，

整理得 $n\geqslant2\times\frac{5\lg2}{1-\lg2}+1$.

将 $\lg2\approx0.3$ 代入，得 $2\times\frac{5\lg2}{1-\lg2}+1\approx5.3$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant6$.

所以至少进行 6 次改良工艺才能使该企业所排放的废

气中污染物的含量达标.

17.解:(1)$f(x)=\log_2\frac{x}{8}\cdot\log_2(2x)=(\log_2x-3)(\log_2x+1)=(\log_2x)^2-2\log_2x-3=(\log_2x-1)^2-4\geqslant-4$,

即 $f(x)$的值域为$[-4,+\infty)$.

(2)因为不等式 $f(x)-g(a)\leqslant0$ 对任意实数 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$恒成立,所以 $f(x)\leqslant g(a)_{\min}$.

$g(a)=4^a-2^{a+1}-3=(2^a)^2-2\times2^a-3=(2^a-1)^2-4$,

令 $t=2^a$,因为 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,所以 $t\in[\sqrt{2},4]$.

设 $h(t)=(t-1)^2-4$,$t\in[\sqrt{2},4]$,

当 $t=\sqrt{2}$时,$h(t)$取得最小值$-1-2\sqrt{2}$,

即 $g(a)_{\min}=-1-2\sqrt{2}$,

所以 $f(x)\leqslant-1-2\sqrt{2}$,即$(\log_2x-1)^2-4\leqslant-1-2\sqrt{2}$,

所以 $1-\sqrt{2}\leqslant\log_2x-1\leqslant\sqrt{2}-1$,

即 $2-\sqrt{2}\leqslant\log_2x\leqslant\sqrt{2}$,解得 $2^{2-\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant2^{\sqrt{2}}$.

所以实数 x 的取值范围为$[2^{2-\sqrt{2}},2^{\sqrt{2}}]$.

18.解:(1)因为 $f(x)=a\cdot3^x+\frac{1}{3^{x-1}}=a\cdot3^x+3\cdot3^{-x}$,所以 $f(-x)=a\cdot3^{-x}+3\cdot3^x$.

又因为 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,所以 $a\cdot3^{-x}+3\cdot3^x=a\cdot3^x+3\cdot3^{-x}$,

即$(3-a)(3^x-3^{-x})=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 $a=3$.

(2)由(1)知,$f(x)=3(3^x+3^{-x})$,则 $g(x)=3^{2x}+3^{-2x}+3m(3^x+3^{-x})+m^2-1=(3^x+3^{-x})^2+3m(3^x+3^{-x})+m^2-3$.

令 $t=3^x+3^{-x}$,由基本不等式可得 $t\geqslant2$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,

则 $h(t)=t^2+3mt+m^2-3$,$t\in[2,+\infty)$.

①当$-\frac{3m}{2}\leqslant2$,即 $m\geqslant-\frac{4}{3}$时,$h(t)=t^2+3mt+m^2-3$在$[2,+\infty)$上单调递增,

则 $h(t)_{\min}=h(2)=m^2+6m+1$,

即 $g(x)_{\min}=m^2+6m+1$;

②当$-\frac{3m}{2}>2$,即 $m<-\frac{4}{3}$时,$h(t)=t^2+3mt+m^2-3$在$\left(2,-\frac{3m}{2}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{3m}{2},+\infty\right)$上单调递增,

则 $h(t)_{\min}=h\left(-\frac{3m}{2}\right)=\left(-\frac{3m}{2}\right)^2+3m\cdot\left(-\frac{3m}{2}\right)+m^2-3=-\frac{5}{4}m^2-3$,即 $g(x)_{\min}=-\frac{5}{4}m^2-3$.

综上所述,$g(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{5}{4}m^2-3,m<-\frac{4}{3},\\ m^2+6m+1,m\geqslant-\frac{4}{3}.\end{cases}$

19.(1)**解**:对于函数 $f_1(x)=x^2$,当 $m>0$,$n>0$ 时,$f_1(m)=m^2>0$,$f_1(n)=n^2>0$.

又 $f_1(m)+f_1(n)-f_1(m+n)=m^2+n^2-(m+n)^2=-2mn<0$,

所以 $f_1(m)+f_1(n)<f_1(m+n)$,

故函数 $f_1(x)=x^2$ 是“速增函数”.

对于函数 $f_2(x)=\log_2(x+1)$,当 $m=n=1$ 时,

$f_2(m)+f_2(n)=2>\log_23=f_2(m+n)$,

故函数 $f_2(x)=\log_2(x+1)$不是“速增函数”.

(2)**解**:当 $n>0$ 时,由函数 $g(x)=2^x-1+2a(2^{-x}-1)$是“速增函数”,

可知 $g(n)=2^n-1+2a(2^{-n}-1)>0$,即$(2^n-1)(2^n-2a)>0$ 对一切正实数 n 恒成立.

又 $2^n-1>0$,可得 $2a<2^n$ 对一切正实数 n 恒成立,所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

由 $g(m)+g(n)<g(m+n)$,可得 $2^{m+n}-2^m-2^n+1+2a(2^{-m-n}-2^{-m}-2^{-n}+1)>0$,

即 $2^n(2^m-1)-(2^m-1)+2a(2^{-m}-1)(2^{-n}-1)=(2^m-1)(2^n-1)+2a(2^{-m}-1)(2^{-n}-1)=(2^m-1)(2^n-1)+2a\cdot2^{-m-n}(2^m-1)(2^n-1)>0$,

故$(2^m-1)(2^n-1)(2^{m+n}+2a)>0$.

又$(2^n-1)(2^m-1)>0$,则 $2^{m+n}+2a>0$.

由 $2^{m+n}+2a>0$ 对一切正实数 m,n 恒成立,可得 $2a+1\geqslant0$,即 $a\geqslant-\frac{1}{2}$.

综上可知,a 的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(3)**证明**:由函数 $f(x)$为“速增函数”,可知对于任意正实数 m,n,

都有 $f(m)>0$,$f(n)>0$,且 $f(m)+f(n)<f(m+n)$.

令 $m=n$,可知 $f(2m)>2f(m)$,即$\frac{f(2m)}{f(m)}>2$,

故对于任意正整数 k 与正数 m，都有 $\frac{f(2^k m)}{f(m)}=\frac{f(2^k m)}{f(2^{k-1}m)}\cdot\frac{f(2^{k-1}m)}{f(2^{k-2}m)}\cdot\ldots\cdot\frac{f(2m)}{f(m)}>2^k$，

对任意 $x\in(2^{k-1},2^k)(k\in\mathbf{N}^*)$，可得 $\frac{1}{x}\in(2^{-k},2^{1-k})$.

又 $f(1)=1$，所以 $f(x)>f(x-2^{k-1})+f(2^{k-1})>f(2^{k-1})\geqslant 2^{k-1}f(1)=\frac{2^k}{2}>\frac{x}{2}$，

同理 $f\left(\frac{1}{x}\right)<f(2^{1-k})-f\left(2^{1-k}-\frac{1}{x}\right)<f(2^{1-k})\leqslant 2^{1-k}f(1)=2^{1-k}<\frac{2}{x}$，

故 $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)>\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$.

单元测试卷(五)

1.B　**解析**：因为 $-1\ 630^\circ=170^\circ-5\times360^\circ$，且 170° 为第二象限角，所以 $-1\ 630^\circ$ 角的终边在第二象限.故选 B.

2.B　**解析**：因为 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$，所以 $\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=2$，即 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$，

所以 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=-\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$.故选 B.

3.A　**解析**：因为 $f(x)=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以当 $k=1$ 时，$x=\frac{5\pi}{6}$ 是其中的一条对称轴方程.

4.A　**解析**：因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 φ $(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，所以 $g(x)=\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$.若 $g(x)$ 为偶函数，则 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.因为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 可以推出函数 $g(x)$ 为偶函数，而函数 $g(x)$ 为偶函数不能推出 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以“$\varphi=\frac{\pi}{3}$”是“$g(x)$ 为偶函数”的充分不必要条件.故选 A.

5.D　**解析**：由已知得 $2\cos A\cos B=-2\cos^2\frac{C}{2}+2=-\cos C+1=\cos(A+B)+1=\cos A\cos B-\sin A\sin B+1$，所以 $\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)=1$.又 $-\pi<A-B<\pi$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$.故选 D.

6.C　**解析**：$\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.又 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.故选 C.

7.D　**解析**：$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $x\in[a,b]$，所以 $x+\frac{\pi}{4}\in\left[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}\right]$.又因为 $-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$.

结合正弦函数 $y=\sin x$ 的图象(图略)可知，

$(b-a)_{\max}=\frac{3\pi}{2}$，$(b-a)_{\min}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $b-a$ 的取值范围是 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$.

故选 D.

8.C　**解析**：令 $X=\omega x+\frac{\pi}{3}$，$\omega>0$，$-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$，则 $-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}$，所以函数 $y=\sin X$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增.由正弦函数的单调性可得 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\\ \frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$.分析可知 k 取 0，则 $0<\omega\leqslant\frac{1}{5}$.当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}$.因为函

数 $y=\sin X$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰好取得一次最大值 1，所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{1}{6}\leqslant\omega<\frac{13}{6}$.

综上可知 $\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{5}$.故选 C.

9.AC　**解析**：对于 A，设扇形的半径为 R，因为 S_1 与 S_2 所在扇形的圆心角分别为 θ，$2\pi-\theta$，

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2}{\frac{1}{2}(2\pi-\theta)\cdot R^2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}$，故 A 正确；

对于 B，因为 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，所以 $S_1=\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times9=3\pi$，故 B 错误；

对于 C，因为 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\theta=(3-\sqrt{5})\pi$，所以 $\theta\approx(3-2.236)\times180^\circ\approx138^\circ$，故 C 正确；

对于 D，$S_1=\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2=\frac{1}{2}\times(3-\sqrt{5})\pi\times400=200(3-\sqrt{5})\pi$，故 D 错误.

故选 AC.

10.BCD　**解析**：由题图可知 $\begin{cases}A+B=4,\\-A+B=-2,\end{cases}$ 解得 $A=3$，$B=1$.

因为 $\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{16}-\left(-\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=4$.

由五点作图法可知 $4\times\left(-\frac{\pi}{16}\right)+\varphi=0$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以 $f(x)=3\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，故选项 A 错误；

因为 $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=3\cos\left(4\times\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，所以 $\left(\frac{\pi}{16},1\right)$ 是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心，故选项 B 正确；

当 $-\pi+2k\pi\leqslant4x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi$ 时，$-\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选项 C 正确；

由 $f(x)=3\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+1=\frac{5}{2}$，得 $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $4x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $4x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，

故 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}=\frac{\pi}{6}$，故选项 D 正确.故选 BCD.

11.ABC　**解析**：对于 A，将函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，故选项 A 正确.

对于 B，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$t=2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，

又 $y=\sin t$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故选项 B 正确.

对于 C，令 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$，可得 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{3\pi}{8}$；

当 $k=2$ 时，$x=\frac{7\pi}{8}$；当 $k=3$ 时，$x=\frac{11\pi}{8}$.

若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有且仅有 2 个零点，

则 $\frac{7\pi}{8}\leqslant a<\frac{11\pi}{8}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$，故选项 C 正确.

对于 D，$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(0)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=1$.

令 $g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$，则 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

若 $g(x)$ 在 $[0,t]$ 上的最大值为 $g(0)$，则实数 t 的最大值为 $\frac{3\pi}{4}$，故选项 D 错误.故选 ABC.

12.$-\frac{\pi}{6}$　**解析**：两式分别平方得 $9\sin^2\beta+\cos^2\alpha-6\sin\beta\cos\alpha=3$，$\sin^2\alpha+9\cos^2\beta+6\sin\alpha\cos\beta=4$，相加得 $10+6\sin(\alpha-\beta)=7$，即 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.

因为 $\alpha,\beta\in\left(0\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{6}$.

13.4　**解析**：由函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增，分析可得 $\omega\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，求得 $\omega\leqslant4$，故 ω 的最大值为 4.

故答案为 4.

14.$\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$　**解析**：因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=2$，

所以 $\frac{\pi\omega}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi<\omega x+\varphi<\frac{\pi\omega}{2}+\varphi$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $f(0)=\sin\varphi>0$，

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有 3 个零点，

所以 $\begin{cases}0<\varphi<\pi,\\3\pi<\frac{\pi\omega}{2}+\varphi\leqslant4\pi,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{3}<\pi,\\3\pi<\frac{\pi\omega}{2}+2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{3}\leqslant4\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\begin{cases}6k-\frac{3}{2}<\omega<6k+\frac{3}{2},\\15-12k<\omega\leqslant21-12k,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$.

因为 $k\in\mathbf{Z}$，由题意可知 $k=1$.所以 $\begin{cases}\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2},\\3<\omega\leqslant9,\end{cases}$ 可得 $\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$，

即 ω 的取值范围是 $\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$.

15.解：由 $\sin x-2\cos x=0$，可得 $\tan x=2$.

$$2\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x=\frac{2\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{2\tan^2x-\tan x+1}{\tan^2x+1}=\frac{2\times2^2-2+1}{2^2+1}=\frac{7}{5}.$$

(2)由方程组 $\begin{cases}\sin x-2\cos x=0,\\\sin^2x+\cos^2x=1,\end{cases}$ 可得 $\sin^2x=\frac{4}{5}$，$\cos^2x=\frac{1}{5}$.

由(1)知 $\tan x=2$，

可得 $\frac{2\sin^3x-\cos x}{\sin x+2\cos^3x}=\frac{2\sin^2x\tan x-1}{\tan x+2\cos^2x}=\frac{2\times\frac{4}{5}\times2-1}{2+2\times\frac{1}{5}}=\frac{11}{12}$.

16.解：(1)因为函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

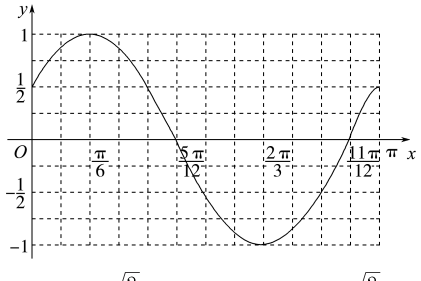
所以 $\omega=2$，$f(x)=\cos(2x+\varphi)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象如下：



(3)因为 $f(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

则 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<2x<2k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $k\pi+\frac{\pi}{24}<x<k\pi+\frac{7\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 x 的取值范围是 $\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{24}<x<k\pi+\frac{7\pi}{24},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

17.解：(1)因为 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2)因为 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\sin^2 x$

$=\frac{3}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$.

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{2\pi}{3}, k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

18.解:(1)因为 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f(x)$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$对称.

又 $f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+f(x)=0$,所以 $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$对称,

则有$\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}(k\in\mathbf{N})$,即 $\omega=2(2k+1)(k\in\mathbf{N})$.

又因为 $0<\omega<5$,所以 $\omega=2$.

(2)因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$,即 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{8}$处取得最大值 2,

所以 $A=2$,则 $2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.又$|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

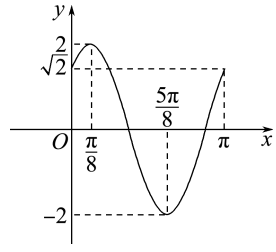
令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,可得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

由 $x\in[0,\pi]$,可知 $k=0$,则$\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}$,

所以 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$.

(3)方程$[f(x)]^2-2af(x)+a^2-1=0$ 可化为$[f(x)-(a+1)][f(x)-(a-1)]=0$,则 $f(x)=a+1$ 或 $f(x)=a-1$.

由(2)可知 $f(0)=f(\pi)=\sqrt{2}$,$f(x)$在区间$[0,\pi]$上的图象如图所示.



因为方程$[f(x)]^2-2af(x)+a^2-1=0$ 在区间$[0,\pi]$上有且仅有 4 个不同的实数解,

所以$\begin{cases}\sqrt{2}<a+1<2,\\ -2<a-1<\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}-2<a+1<\sqrt{2},\\ -2<a-1<\sqrt{2},\end{cases}$

解得$\sqrt{2}-1<a<1$ 或$-1<a<\sqrt{2}-1$.

所以实数 a 的取值范围是$(-1,\sqrt{2}-1)\cup(\sqrt{2}-1,1)$.

19.解:(1)因为 AB 为直径,且 $AB=1$,所以$\angle APB=90°$,

$PA=\cos\alpha$,$PB=\sin\alpha$.

因为 PT 切圆于点 P,所以$\angle TPB=\angle PAB=\alpha$,

所以 $BC=\sin\alpha\cdot PB=\sin^2\alpha$.

所以 $S_{四边形ABTP}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle TPB}$

$=\frac{1}{2}PA\cdot PB+\frac{1}{2}PT\cdot BC$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)$

$=\frac{1}{4}(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)+\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$.

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以$-\frac{\pi}{4}<2\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$,

所以当 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{3\pi}{8}$时,四边形 $ABTP$ 的面积最大.

(2)$PA+PB+PC=\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$.

设 $t=\cos\alpha+\sin\alpha$,则 $t^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha=1+2\cos\alpha\sin\alpha$,所以 $\cos\alpha\sin\alpha=\frac{t^2-1}{2}$,

则 $PA+PB+PC=\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$.

令 $g(t)=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$,

因为 $t=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$,

又 $g(t)$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递增，

所以 $g(t)\in\left(1,\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$，

故 $PA+PB+PC$ 的取值范围是 $\left(1,\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$.

模块测试卷

1.C **解析**：因为 $B=\{x|x^2-3x=0\}=\{0,3\}$，所以 $A\cup B=\{-1,0,2,3\}$.

又 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-2,1\}$.

故选 C.

2.C **解析**：由幂函数 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2+m-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

得 $\begin{cases}m^2-m-5=1,\\ m^2+m-3<0,\end{cases}$ 解得 $m=-2$，

故“$m=-2$ 或 $m=3$”是“幂函数 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2+m-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数”的必要不充分条件.

故选 C.

3.A **解析**：存在量词命题的否定是全称量词命题，且要注意否定结论.故选 A.

4.C **解析**：将函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得函数 $g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=2\cos\left(2x+\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象.又函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称，则 $\varphi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{7\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则取 $k=-1,\varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.B

6.B **解析**：设 $y=f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，

又 $f(-x)=\frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，排除 A，C；

当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln|x|<0,x^2+2>0$，所以 $f(x)<0$，排除 D.故选 B.

7.D **解析**：对于 A，要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $x^2+2x>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$，故选项 A 错误；

对于 B，由对数函数的性质可知，函数 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，故选项 B 错误；

对于 C，因为函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 不具有奇偶性，故选项 C 错误；

对于 D，令 $\mu=x^2+2x$，则 $f(\mu)=\log_2\mu$，

由二次函数的性质可知，$\mu=x^2+2x$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，

由对数函数的性质可知，$f(\mu)=\log_2\mu$ 在定义域内单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，故选项 D 正确.故选 D.

8.D **解析**：令 $g(x)=xf(x)$，由题意知 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

又 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，$g(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

①当 $t>0$ 时，$\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)>(2t-1)f(2t-1)$，即 $g\left(\frac{1}{t}\right)>g(2t-1)$，所以 $\frac{1}{t}<2t-1$，所以 $1<2t^2-t$，解得 $t>1$；

②当 $t<0$ 时，$\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)<(2t-1)f(2t-1)$，即 $g\left(\frac{1}{t}\right)<g(2t-1)$，所以 $\frac{1}{t}>2t-1$，所以 $1<2t^2-t$，解得 $t<-\frac{1}{2}$.

综上，$t<-\frac{1}{2}$ 或 $t>1$.

故选 D.

9.ACD **解析**：因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 不正确；令 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而 $y=\frac{1}{2}\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，B 正确；因为 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$，C 不正确；由于 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right]$，所以函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到，D 不正确.故选 ACD.

10. ACD　**解析**：利用 $y=\log_2 x$ 是单调递增函数，

可得 $\log_2 3<\log_2 5$，故选项 A 正确；

利用指数函数的单调性可知 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，

利用幂函数的单调性可知 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，故选项 B 错误；

利用指数函数的单调性可知 $2^{0.3}>2^0=1$，

利用对数函数的单调性可知 $\log_3 2<\log_3 3=1$，所以 $2^{0.3}>\log_3 2$，故选项 C 正确；

利用作商法 $\frac{\log_2 3}{\log_3 4}=\frac{\log_2 3}{\frac{\log_2 4}{\log_2 3}}=\left(\frac{\log_2 3}{\sqrt{2}}\right)^2$，

因为 $2^{\sqrt{2}}<2^{1.5}=\sqrt{2^3}<\sqrt{9}=3$，所以 $\log_2 3>\log_2 2^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

即 $\frac{\log_2 3}{\log_3 4}=\left(\frac{\log_2 3}{\sqrt{2}}\right)^2>1$，所以 $\log_2 3>\log_3 4$，故选项 D 正确.

11. BD　**解析**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\log_4(1+4^x)-\log_4 4^{\frac{x}{2}}=\log_4\frac{1+4^x}{2^x}=\log_4(2^{-x}+2^x)$，

所以 $f(-x)=\log_4(2^x+2^{-x})=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 A 错误，B 正确；

令 $t=2^x$，则 $y=\log_4\left(t+\frac{1}{t}\right)$，

令 $s=t+\frac{1}{t}$，则 $y=\log_4 s$，

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$t\in[1,+\infty)$，所以 $s=t+\frac{1}{t}$ 为增函数，

又 $y=\log_4 s$ 为增函数，所以 $y=\log_4\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 为增函数.

又 $t=2^x$ 为增函数，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

所以 $f(x)\geqslant f(0)=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

所以 C 错误，D 正确.

故选 BD.

12. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　**解析**：原式 $=\frac{2\cos^2 10^\circ}{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}-\sin 10^\circ\times\left(\frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ}-\frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}\right)=\frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}-2\cos 10^\circ=\frac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-2\sin(30^\circ-10^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-2\sin 30^\circ\cos 10^\circ+2\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. $\frac{1}{2}$　**解析**：因为正实数 a,b 满足 $a+b=4$，

所以 $a+1>1$，$b+3>3$，$a+1+b+3=8$，

所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}\right)[(a+1)+(b+3)]=\frac{1}{8}\left(\frac{a+1}{b+3}+\frac{b+3}{a+1}+2\right)\geqslant\frac{1}{8}\left(2\sqrt{\frac{a+1}{b+3}\times\frac{b+3}{a+1}}+2\right)=\frac{1}{2}$.

当且仅当 $\frac{a+1}{b+3}=\frac{b+3}{a+1}$，即 $a=3$，$b=1$ 时取等号，

所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

故答案为 $\frac{1}{2}$.

15. **解**：(1)因为 $B=\{x\mid x-x^2>0\}=\{x\mid 0<x<1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 0$，或 $x\geqslant 1\}$.

又 $a=1$ 时，$A=\{x\mid 0<x<3\}$，

所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$.

(2)若 $A=\varnothing$，则 $a-1\geqslant 2a+1$，

解得 $a\leqslant -2$，满足 $A\cap B=\varnothing$.

若 $A\neq\varnothing$，且由 $A\cap B=\varnothing$，

可知 $\begin{cases}2a+1>a-1,\\2a+1\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+1>a-1,\\a-1\geqslant 1,\end{cases}$

解得 $-2<a\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant 2$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

16. **解**：(1)因为 $f(x)=\frac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(0)=\frac{-1+b}{2+a}=0$，即 $b=1$.

$-f(1)=-\frac{-2+1}{4+a}=f(-1)=\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$，解得 $a=2$.

所以 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$，$f(-x)=\frac{-2^{-x}+1}{2^{-x+1}+2}=\frac{2^x-1}{2^{x+1}+2}=$

$-f(x)$，符合题意.

(2)由(1)知 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$，

由指数函数的单调性，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

证明如下：设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{x1}+1}-\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{x2}+1}\right)$

$=\dfrac{2^{x2}-2^{x1}}{(2^{x1}+1)(2^{x2}+1)}$.

由指数函数的单调性可知，$2^{x2}>2^{x1}$，即 $2^{x1}-2^{x2}>0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(3)因为 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(2kt^2+kt)+f(kt-kt^2+1)<0\Rightarrow f(2kt^2+kt)$

$<-f(kt-kt^2+1)=f(-kt+kt^2-1)$.

因为 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以 $2kt^2+kt>-kt+kt^2-1$，即 $kt^2+2kt+1>0$，

从而对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$kt^2+2kt+1>0$ 恒成立.

当 $k=0$ 时，不等式 $kt^2+2kt+1>0$ 恒成立，满足题意；

当 $k\neq0$ 时，要使对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$kt^2+2kt+1>0$ 恒成立，

只需 $\begin{cases}k>0,\\ \Delta=4k^2-4k<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<1$.

综上所述，k 的取值范围为 $[0,1]$.

17.解：(1)设最高点为 $(x_1,1)$，相邻的最低点为 $(x_2,-1)$，

则 $|x_1-x_2|=\dfrac{T}{2}(T>0)$.

由题意及勾股定理得 $(x_1-x_2)^2+[1-(-1)]^2=4+\pi^2$，

所以 $\dfrac{T^2}{4}+4=4+\pi^2$，所以 $T=2\pi=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

又 $\omega>0$，所以 $\omega=1$，

因此 $f(x)=\sin(x+\varphi)$.

由于函数 $f(x)$是偶函数，所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，则 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$的解析式为

$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

(2)因为 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=5$，

所以 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=5$，

所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

所以 $\dfrac{\sqrt{2}f\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$=\dfrac{\cos2\alpha+\sin2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$=\dfrac{(2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$.

18.解：(1)$(80-30)\times10-300=200$(万元).

所以当购进产品数量为 10 万件时，利润是 200 万元.

(2)当 $0<x\leqslant15$ 时，$W(x)=(80-30)x-300=50x-300$.

当 $15<x\leqslant30$ 时，不妨设降价 t 元，购进产品全部售出，

则 $15+0.5t=x$，得到 $t=2x-30$，

所以 $W(x)=[80-(2x-30)]x-30x-300=-2x^2+80x-300$.

当 $x>30$ 时，$W(x)=-x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000$，

所以 $W(x)=\begin{cases}50x-300,0<x\leqslant15,\\ -2x^2+80x-300,15<x\leqslant30,\\ -x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000,x>30.\end{cases}$

(3)由(2)知，当 $x\leqslant15$ 时，$W(x)=50x-300$，

当 $x=15$ 时，利润最大，此时利润是 450 万元，

当 $15<x\leqslant30$ 时，$W(x)=-2x^2+80x-300=-2(x-20)^2+500$，

当 $x=20$ 时，利润最大，此时利润是 500 万元.

当 $x>30$ 时，$W(x)=-x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000=-\left[(x+10)+\dfrac{2\,500}{x+10}\right]+1\,010\leqslant-2\sqrt{(x+10)\times\dfrac{2\,500}{(x+10)}}+1\,010=910$，

当且仅当 $x+10=\dfrac{2\,500}{x+10}$，即 $x=40$ 时，等号成立，

此时利润最大，利润是 910 万元.

因为 $910>500>450$，所以购进并销售产品 40 万件时，利润最大，此时利润是 910 万元.

19.解：(1)要使函数 $f(x)$ 有意义，须使 $e^x-1>0$，

解得 $x>0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.理由如下：

(方法一)因为 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

$=\ln\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)$，

又 $y=e^x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $y=\dfrac{2}{e^x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

所以 $y=1-\dfrac{2}{e^x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $y=\ln\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

故 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(方法二)因为 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，

对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，可知 $e^{x_2}>e^{x_1}>1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}-\ln\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}=\ln\dfrac{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)}$.

又 $(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)-(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)=2(e^{x_1}-e^{x_2})<0$，

可知 $0<\dfrac{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)}<1$，

所以 $\ln\dfrac{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(3)由(2)可知 $g(x)=f(x)+\ln b$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，设区间 $[m,n]$ 是函数 $g(x)=f(x)+\ln b$ 的“完美区间”，

则 $g(m)=m$，$g(n)=n$.

可知方程 $g(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少存在两个不同的实数解，

即 $b=\dfrac{e^x(e^x+1)}{e^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少存在两个不同的实数解，

所以直线 $y=b$ 与函数 $y=\dfrac{e^x(e^x+1)}{e^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象至少存在两个不同的交点.

令 $t=e^x-1$，则 $t>0$，

所以 $b=\dfrac{(t+1)(t+2)}{t}=\dfrac{t^2+3t+2}{t}=t+\dfrac{2}{t}+3\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时，取等号.

又 $y=t+\dfrac{2}{t}+3$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，

且当 $t\to 0$ 时，$y\to+\infty$；当 $t\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$.

所以 $b>3+2\sqrt{2}$.

故实数 b 的取值范围为 $(3+2\sqrt{2},+\infty)$.